Приложения интеграла

Аддитивная функция ориентированного промежутка – это функция $(\alpha,\beta)\mapsto I(\alpha,\beta)$, которая каждой упорядоченной паре (α,β) точек отрезка $[a,b]$ ставит в соответствие вещественное число $I(\alpha,\beta)$ так, что для любой тройки точек $\alpha,\beta,\gamma\in[a,b]$ выполнено равенство $I(\alpha,\gamma)=I(\alpha,\beta)+I(\beta,\gamma)$. Аддитивная функция I определяет функцию $F(x)=I(a,x)$ такую, что $I(\alpha,\beta)=F(\beta)-F(\alpha)$ (и функция $x\mapsto F(x)$, определённая на отрезке $[a,b]$, задаёт аддитивную функцию I).

1. Пусть для аддитивной функции I отрезка $[a,b]$ существует интегрируемая на $[a,b]$ функция f, такая, что неравенство $\inf\limits_{x\in[\alpha,\beta]} f(x)(\beta-\alpha)\leqslant I(\alpha,\beta)\leqslant \sup\limits_{x\in[\alpha,\beta]} f(x)(\beta-\alpha)$ верно для любых точек $\alpha\leqslant\beta$ из $[a,b]$. Докажите, что $I(a,b)=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

2. Длина пути. Отображение $\gamma\colon t\mapsto(x(t),y(t),z(t))$ отрезка $[a,b]$ в пространство $\mathbb{R}^3$ определено тройкой непрерывно дифференцируемых функций x,y,z. Определите длину образа $\gamma([a,b])$ найдите формулу его вычисления.

3. Функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[a,b]$. Чему равна длина её графика на этом отрезке?

4. Найдите длину окружности единичного радиуса.

5. Объём тела вращения. График непрерывной на отрезке функции $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ вращается вокруг оси Ox. Найдите формулу вычисления объёма полученного тела вращения.

6. Выведите формулу объёма шара.

7. Выведите формулы вычисления объёмов конуса и пирамиды.

8. Непрерывные функции f и g взаимно обратны, неотрицательны и удовлетворяют равенствам $f(0)=g(0)=0$. Для всех $x,y>0$ докажите неравенство $\int\limits_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+\int\limits_0^y g(t)\,\mathrm{d}t\geqslant xy$.

9. Найдите объём пересечения двух прямых круговых цилиндров с радиусами основания 1 и осями, идущими вдоль осей Ox и Oy (можно считать, что у обоих цилиндров точка O – середина оси и их высоты равны 2).

Пусть график непрерывно дифференцируемой на отрезке функции $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ вращается вокруг оси Ox. Площадь поверхности полученного тела вращения вычисляется по формуле $S[a,b] = 2\pi \int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$.

10. Выведите формулу площади поверхности сферы.

11. Единичную сферу пересекают две параллельные плоскости, расположенные на расстоянии h друг от друга. Какой может быть площадь поверхности заключённой между ними части сферы?

12. Докажите, что круг диаметром 1 невозможно покрыть несколькими бумажными полосами, суммарная ширина которых меньше 1.

13. Многогранник описан около сферы. Назовем его грань большой, если проекция сферы на плоскость грани целиком попадает в грань. Докажите, что больших граней не больше 6.

14. На столе лежит круглый арбуз радиуса R. Над поверхностью стола летают n ос, каждая — на расстоянии $\sqrt{2}R$ от центра арбуза. В какой-то момент осы расположились так, что ни одна из них не видит другую. Найдите наибольшее возможное значение n.

15. Около сферы радиуса 10 описан некоторый 19-гранник. **а)** Докажите, что на его поверхности найдутся две точки, расстояние между которыми больше 21. **б)** Покажите, что это утверждение верно даже для 22-гранника.